

VAG: code de propagation de la houle

Notice théorique

NOTICE THEORIQUE	1
I. PRESENTATION GENERALE DU PROGRAMME	1
II. DOMAINE D'APPLICATION ET LIMITATIONS DU PROGRAMME	2
III. FONDEMENTS THEORIQUES	3
IV. METHODE DE CALCUL	11

I. Présentation générale du programme

Pour entreprendre un projet d'aménagement portuaire ou du littoral, la connaissance de l'amplitude de la houle et de sa direction sur le site étudié est un élément essentiel.

Dans beaucoup de cas, on connaît (ou on peut évaluer) seulement les caractéristiques de la houle au large. On peut en déduire les caractéristiques de la houle en des points près du rivage en tenant compte de la réfraction de la houle, en utilisant notamment ce qu'on appelle les plans de vagues.

On peut théoriquement tracer des plans de vagues à la main de proche en proche mais ce travail est excessivement long et fastidieux dès qu'il s'agit d'étudier plusieurs directions de houle. D'autre part, le résultat dépend trop du soin et de l'habileté de celui qui fait les calculs et les dessins. Il est d'ailleurs pratiquement impossible de prédire ainsi des plans de vague sur de grandes longueurs, l'addition des erreurs pouvant fausser complètement les résultats et les rendre inutilisables.

L'utilisation de l'ordinateur permet d'obtenir très rapidement tous les plans de vagues désirés, dès que la définition des fonds a été introduite dans la machine.

Le Centre d'études Techniques Maritimes Et Fluviales a développé un programme aux différences finies dans le but d'obtenir un code de calcul d'emploi pratique et rapide, permettant une visualisation instantanée des résultats sans pour autant chercher des précisions illusoires.

Le programme Fudaa-VAG permet, sous certaines conditions développées ultérieurement, de représenter la propagation de la houle en prenant en compte la réfraction. Ce phénomène se rencontre au moment où la vague rencontre une variation modérée de la pente du fond. Cela se traduit par un changement de la direction de la propagation, de la longueur d'onde et de l'amplitude de la houle.

II. Domaine d'application et limitations du programme

Le programme traite la progression d'une houle venant du large jusqu'à une cible prédéfinie. Il faut donc disposer en premier lieu de cartes bathymétriques allant jusqu'à des fonds suffisamment importants.

Deuxièmement on suppose que la houle est régulière (c'est-à-dire provenant d'une seule direction et de période unique) et que les phénomènes sont linéaires. Les limites de validité accompagnant cette houle de STOKES au premier ordre font qu'en faible profondeur, le programme s'arrête lorsque le niveau de la mer (fonds + marée) descend en dessous de 2m. De plus, comme les frottements sur les fonds sont négligés, il serait douteux de cautionner les résultats en faible profondeur où se produisent de surcroît les déferlements non pris en compte.

Troisièmement, la précision spatiale des résultats ne peut pas être plus fine que celle du maillage initiale. Si on veut réduire la maille des résultats, on doit alors procéder à des interpolations mathématiques qui ne doivent pas être abusives sous peine de perdre la crédibilité physique du phénomène étudié.

Enfin, il convient de souligner, qu'en raison des hypothèses simplificatrices adoptées dans la théorie de la réfraction de la houle, les plans de vague ne doivent pas être acceptés sans un examen critique des résultats. Il est ainsi primordial de repérer les singularités bathymétriques (fosse, écueil, etc.) qui dévient localement les houles sans répartir les effets sur l'ensemble du front de vague. Ce phénomène peut aller jusqu'au "croisement d'orthogonales" qui constitue la principale limite du programme. En effet, le principe de conservation de l'énergie entre deux orthogonales n'a alors physiquement plus aucun sens dans la mesure où un croisement conduit à une énergie et à une hauteur de houle infinies. Le programme Fudaa-VAG atteint dans ce cas ses limites et n'est plus adapté.

III. Fondements théoriques

1. Hypothèses simplificatrices et notations

Nous ne considérons que la propagation d'une houle monochromatique dans un milieu fluide infini, compris entre une surface libre et un fond imperméable.

Le fluide est supposé parfait, incompressible, de masse volumique constante ρ et est placé dans le champ de pesanteur de gravité constante g . La surface libre est sous la pression atmosphérique constante p_0 .

L'écoulement est supposé irrotationnel et la propagation se fait sous l'action de la gravité seule (on néglige l'action de la force de Coriolis).

Les caractéristiques de la houle sont notées de la façon suivante :

T : la période (s)

L : la longueur d'onde (m)

$\omega = 2\pi/T$: pulsation de la houle (rad/s)

$k = 2\pi/L$: nombre d'onde (rad/m)

$C = \frac{\omega}{k}$: la célérité de l'onde (m/s)

$C_g = \frac{d\omega}{dk}$: la célérité de groupe (m/s) ; $C/2 < C_g < C$

d : la profondeur d'eau au repos (m)

h : hauteur de la houle de crête à creux (m)

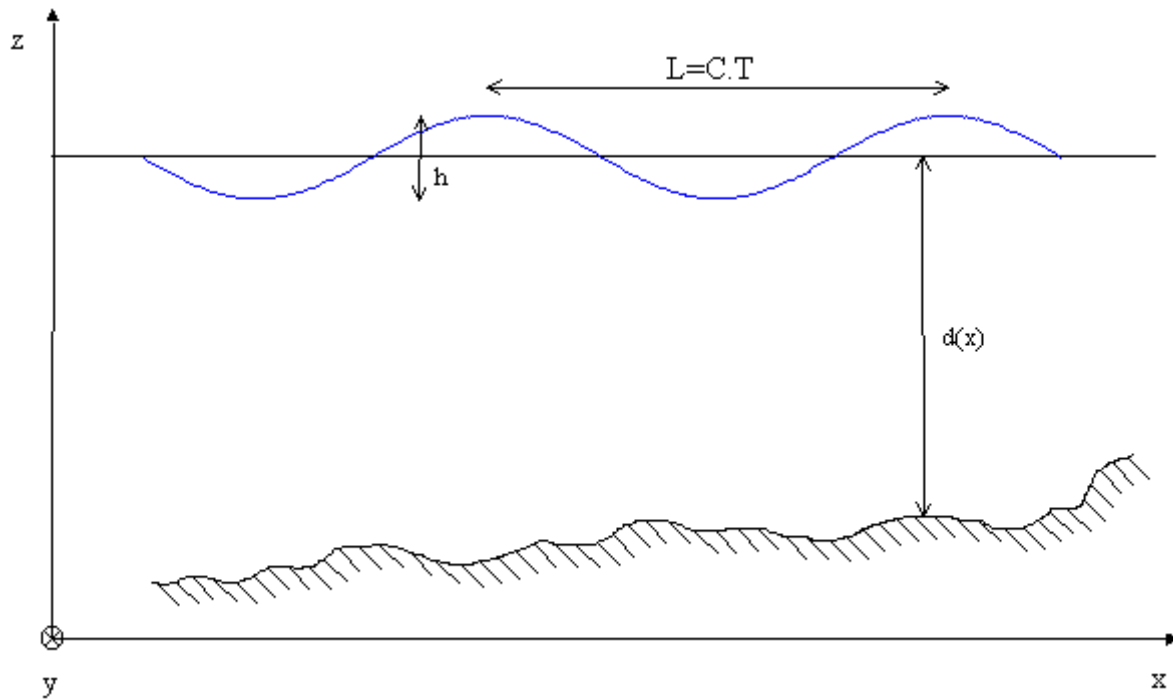


Figure 1, notations utilisées pour Fudaa-VAG

On considère que la cambrure des vagues n'est pas trop grande c'est-à-dire que la hauteur de houle h est négligeable devant la longueur d'onde L .

On considère de même que h est négligeable devant la profondeur moyenne d .

On utilisera l'expression fondamentale de dispersion reliant la longueur d'onde L , la période T de la houle et la profondeur d (Figure 1).

$$L = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh\left(2 \cdot \pi \frac{d}{L}\right)$$

On considère enfin que la variation des pentes bathymétriques est douce. Si on appelle $Z(x;y)$ la surface représentant la bathymétrie, l'hypothèse de pente douce revient à supposer

que $\frac{\partial Z}{\partial x} \ll 1$ et $\frac{\partial Z}{\partial y} \ll 1$

2. L'équation de Berkhoff et ses conséquences immédiates

Toutes les hypothèses précédemment évoquées permettent d'obtenir l'équation de Berkhoff :

$$\nabla(C \cdot C_g \cdot \nabla \Psi) + k^2 \cdot C \cdot C_g \cdot \Psi = 0 \quad (1)$$

où ψ est le potentiel des vitesses complexe pouvant s'exprimer sous la forme : $\psi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^{i\mathbf{s}}$

remarque : le terme $\nabla(C.C_g \cdot \nabla\Psi)$ peut aussi s'écrire $\text{div}(C.C_g \cdot \text{grad}\Psi)$

Avec $\psi(\mathbf{x};\mathbf{y})$ connu, l'amplitude complexe $h(x;y)$ de la houle sera :

$$h(x,y) = \frac{2.i.\omega}{g} \cdot \Psi(x,y)$$

et l'élévation instantanée ξ de la surface libre sera :

$$\xi(x,y,t) = h(x,y) \cdot e^{-i\omega t}$$

L'équation de Berkhoff est une équation permettant de tenir compte des deux phénomènes importants susceptibles de modifier la propagation de la houle que sont la diffraction et la réfraction.

Si on réécrit l'équation de Berkhoff en utilisant le module A et la phase S du potentiel complexe ψ et que l'on sépare partie imaginaire et partie réelle on obtient les deux équations suivantes :

- La partie réelle donne :

$$|\nabla S|^2 = k^2 + \frac{\nabla^2 A}{A} + \frac{\nabla(C.C_g)}{C.C_g} \cdot \frac{\nabla A}{A} \quad (2)$$

Le programme Fudaa-VAG est un code de réfraction pure ce qui signifie que la norme du gradient de la phase est égale au nombre d'onde. On néglige donc les deux termes supplémentaires qui sont dus à la diffraction.

- La partie imaginaire de l'équation de Berkhoff donne :

$$\nabla(C.C_g \cdot A^2 \nabla S) = 0$$

ce qui revient à écrire, si on pose $\mathbf{P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \omega}{g} \cdot C.C_g \cdot A^2 \cdot \nabla S$ que finalement $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ (3) avec \mathbf{P} le vecteur flux d'énergie

On considère donc qu'il y a conservation du flux d'énergie entre deux orthogonales aux lignes de crêtes

3. Calculs du tracé des orthogonales et des plans de crêtes

En cas de réfraction pure, l'équation (2) se résume à $|\nabla S|^2 = k^2$

soit encore $\nabla S = k$ (4)

En utilisant le fait que le rotationnel d'un gradient est le vecteur nul, on obtient alors :

$$\nabla \wedge k = 0 \quad (5.a)$$

Soit θ l'angle entre l'axe Ox et la direction d'une ligne de crête donnée par le vecteur unitaire u_n . Soit le vecteur unitaire u_s représentant la direction de propagation de la houle, perpendiculaire à la ligne de crête.

Dans le repère (Oxy), le vecteur k s'écrit de la façon suivante : $k = -\sin\theta .i + \cos\theta .j$

La relation (5.a) devient alors :

$$\frac{\partial k}{\partial x} . \cos\theta + \frac{\partial k}{\partial y} . \sin\theta = k . \sin\theta . \frac{\partial \theta}{\partial x} - k . \cos\theta . \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (5.b)$$

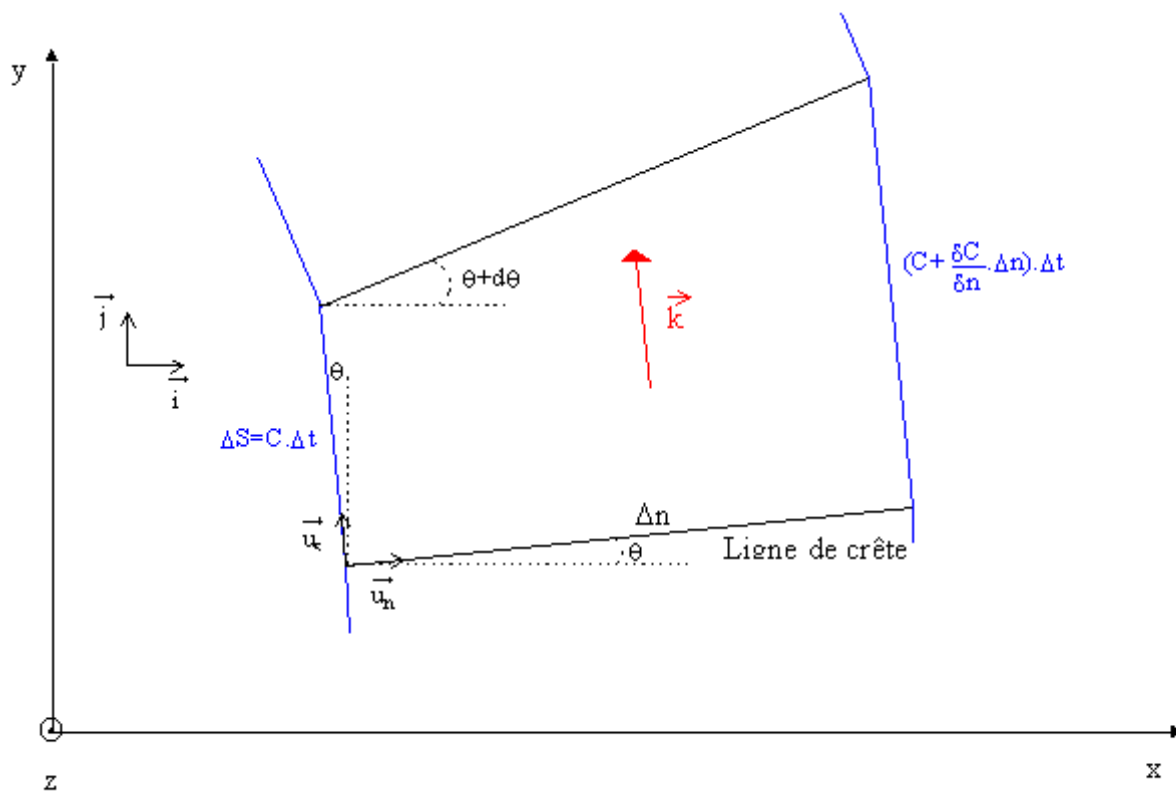


Figure 2, notation pour le calcul des orthogonales

Soit un vecteur quelconque $u = x.i + y.j = n.u_n + S.u_s$

On a alors les relations vectorielles suivantes :

$$u_n = \cos\theta .i + \sin\theta .j \text{ et } u_s = -\sin\theta .i + \cos\theta .j$$

on peut en déduire les relations de projection suivantes:

$$x = n \cdot \cos\theta - S \cdot \sin\theta \text{ et } y = n \cdot \sin\theta + S \cdot \cos\theta$$

ce qui permet de décomposer les dérivées partielles de la façon suivante :

$$\frac{\partial \theta}{\partial S} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial S} = -\sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (5.c)$$

$$\frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = \cos\theta \frac{\partial k}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial k}{\partial y} \quad (5.d)$$

En reportant ces deux dernières équations dans l'équation (5.b), on s'aperçoit que le changement de direction d'une orthogonale est donnée par la relation :

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial k}{\partial n}$$

or comme $k = \omega / C$ et que ω est une constante du problème (houle monochromatique), on arrive finalement à l'équation :

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = -\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial n} = -\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial n} \quad (6.a)$$

On peut aussi réécrire cette équation sous la forme plus facilement exploitable :

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = -\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial n} \quad (6.b)$$

La théorie de la houle de stokes 1^{er} ordre donne les relations :

$$C = \frac{L}{T} = \frac{g \cdot T}{2 \cdot \pi} \cdot \text{th} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot d}{C \cdot T} \right) \quad (7.a) \quad C_s = \frac{C}{2} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot k \cdot d}{\text{sh}(2 \cdot k \cdot d)} \right) \quad (7.b)$$

La célérité varie dans le même sens que la profondeur ; elle tend vers :

$$C_0 = \frac{g \cdot T}{2 \cdot \pi} \text{ pour } d \text{ tendant vers } +\infty$$

Pour les grandes profondeurs, la variation de C avec d est très faible : pour $0.6T^2 < d$ (T en s, d en m), on a $0.98 < C/C_0 < 1$. La célérité peut alors être considérée comme constante et égale à C_0 . Les lignes de crêtes de la houle sont alors des droites parallèles et équidistantes.

Si la profondeur est plus faible et si les isobathes ne sont pas perpendiculaires à la direction de la houle, la célérité variant, les lignes de crêtes, ainsi que les orthogonales à ces lignes se déforment.

La surface représentant les fonds étant supposée connue, C et $\frac{\partial C}{\partial d}$ peuvent être calculés à partir de l'équation (7.a) et $\frac{\partial d}{\partial n}$ est la pente du fond dans le sens perpendiculaire aux orthogonales.

En partant d'une zone où la profondeur peut être considérée comme infinie on peut, par intégrations numériques successives à l'aide des relations (6.a) ou (6.b), calculer le tracé de chaque orthogonale, puis les lignes de crêtes, c'est-à-dire faire ce que l'on appelle un plan de vague.

4. Calcul des hauteurs de houle

Le but principal du programme Fudaa-VAG est de calculer la hauteur de la houle en certains endroits correspondants à l'emplacement d'ouvrages ou à l'entrée d'un port.

L'équation (3) implique qu'il n'y a pas de pertes d'énergie (dues aux frottements sur le fond par exemple) et qu'il n'y a pas d'échange d'énergie à travers les orthogonales.

La hauteur est alors calculée en écrivant que l'énergie transmise en moyenne sur une période à travers un plan vertical, perpendiculaire à la direction de propagation et comprise entre deux orthogonales, est la même au point de départ et à l'endroit considéré.

Soit :

l_1 : l'écartement de deux orthogonales au départ

l_3 : l'écartement des deux mêmes orthogonales à l'endroit considéré

En partant de l'équation $\nabla P=0$ et en utilisant le théorème flux-divergence, on obtient :

$$\iint_{\Omega} \text{div}(C \cdot C_g \cdot A^2 \cdot \text{grad}S) \cdot d\Omega = 0 \quad \text{est équivalent à} \quad \oint_{\Gamma} C \cdot C_g \cdot A^2 \cdot \text{grad}S \cdot n \cdot d\Gamma = 0$$

avec Ω la surface engendré entre deux lignes de crêtes successives et deux orthogonales successives. Soit Γ le contour fermé contenant la surface Ω que l'on peut décomposer en quatre éléments de surface. On doit alors traiter l'équation :

$$\int_{\Gamma} C \cdot C_g \cdot A^2 \cdot \text{grad}S \cdot n \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma_1} (...) + \int_{\Gamma_2} (...) + \int_{\Gamma_3} (...) + \int_{\Gamma_4} (...) = 0$$

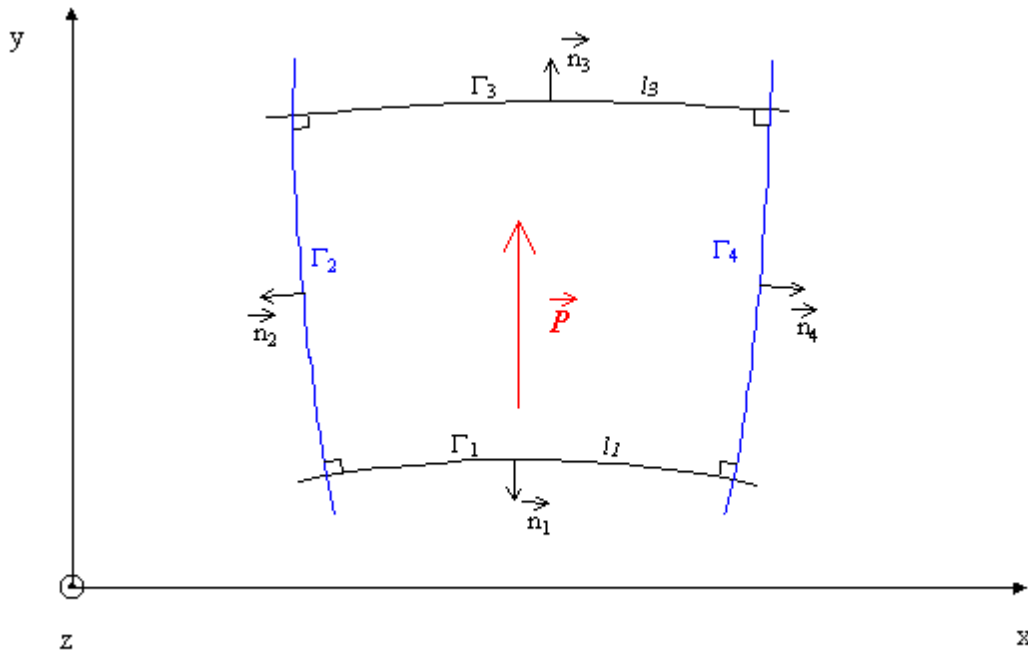


Figure 3, notation utilisée pour la conservation de l'énergie

on sait, par définition du gradient que $\text{grad } S$ est perpendiculaire aux orthogonales ce qui implique donc que :

$$\int_{\Gamma_2} C_g C_g A^2 \cdot \text{grad } S \cdot n \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma_4} C_g C_g A^2 \cdot \text{grad } S \cdot n \cdot d\Gamma = 0$$

et puisque $\text{grad } S \cdot n = k$, on obtient alors :

$$\int_{\Gamma_2} C_g C_g A^2 \cdot k \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma_4} C_g C_g A^2 \cdot k \cdot d\Gamma = 0$$

finalement, comme $k = \omega / C$ et que la houle est supposé monochromatique (ω constant)

$$\left[C_g \cdot A^2 \cdot l \right]_{\Gamma_2} = \left[C_g \cdot A^2 \cdot l \right]_{\Gamma_4}$$

soit encore

$$\frac{A_3}{A_1} = \sqrt{\frac{C_{g1}}{C_{g3}}} \cdot \sqrt{\frac{l_1}{l_3}} = K1 \cdot K2 \quad (8)$$

Les valeurs de C_g ne dépendent que de la profondeur d qui est connue et peuvent donc être calculées en tout point grâce aux formules (7.a) et (7.b). Les espacements l des orthogonales sont calculés grâce à l'équation (6.a). On peut donc calculer la hauteur des vagues de proche en proche.

Si on considère que la ligne de crête initiale se trouve au large où l_0 est l'écartement de deux orthogonales et C_{g0} la célérité de groupe. On a alors $C_{g0} = \frac{gT}{2\pi}$, ce qui donne alors :

$$K1 = \sqrt{\frac{l_0}{l_3}} \quad \text{et} \quad K2 = \sqrt{\frac{C_{g0}}{C_{g3}}} = \frac{ch\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}{\sqrt{sh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \cdot ch\left(\frac{2\pi d}{L}\right) + \frac{2\pi d}{L}}}$$

où K2 est le coefficient de shoaling à la profondeur d, et où K1 est le coefficient de réfraction que l'on obtient pratiquement à partir des écartements entre orthogonales voisines.

IV. Méthode de calcul

1. Définition des fonds

Les relations (7.a) et (7.b) ont été établies avec l'hypothèse d'une profondeur constante. Mais on peut admettre que cette relation reste valable pour des fonds de forme quelconque, lorsque les pentes restent faibles (il faut que la variation de profondeur par longueur d'onde reste inférieure à la profondeur elle-même), en considérant que l'on a une profondeur constante sur une longueur d'onde, égale à la profondeur moyenne. Les fonds pris en compte devront être "lissés" de façon à faire disparaître les petits accidents de relief de longueur nettement inférieure à la longueur d'onde.

Les cotes des fonds réels sont obtenues par des sondages et sont données par un semis de points. Le pré-traitement agit alors sur ce semis de points de la façon suivante (voir Figure 4):

- Facettisation des points réels à l'aide du programme DUNES
- création d'une grille régulière 2D (coordonnées x et y)
- projection des nœuds de la grille sur la surface des fonds facettisés ce qui donne une coordonnée z interpolée pour chaque nœud de la grille

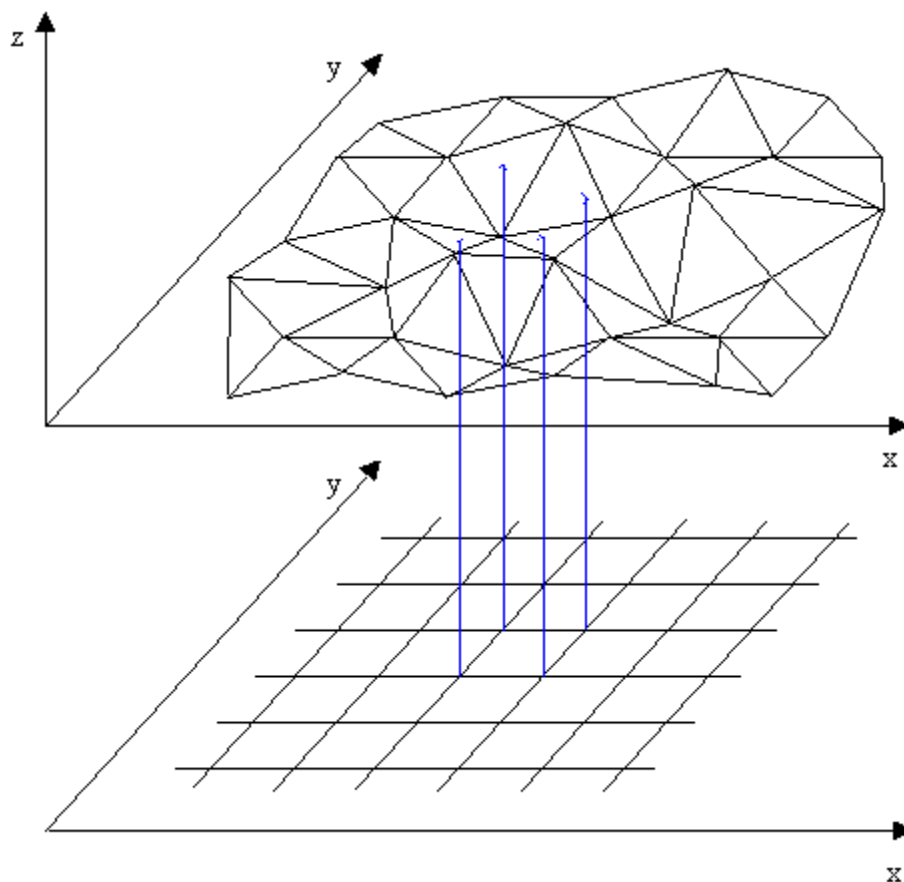


Figure 4, création du maillage utilisé dans Fudaa-VAG

2. Calcul de la longueur d'onde L pour une profondeur donnée d

Il serait facile de résoudre à chaque fois l'équation implicite :

$$L = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi} \cdot \text{th} \left(2 \cdot \pi \frac{d}{L} \right)$$

Mais il est beaucoup plus rapide et très suffisant de procéder de la façon suivante :

- On calcule une fois pour toutes, au début du programme, en résolvant l'équation de dispersion, les valeurs de L pour les valeurs entières m de d de 1 jusqu'à 400 mètres, et pour la période donnée.
- Pour une valeur de d : d=m+r (m étant la partie entière et r la partie décimale), on interpole par un polynôme du 2^{ème} degré entre les valeurs de L_{m-1}, L, L_{m+1} soit :

$$L = L_m + \frac{r}{2} (L_{m+1} - L_{m-1}) + \frac{r^2}{2} (L_{m+1} - 2L_m + L_{m-1})$$

$$L = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi}$$

Si d>400m, on prend

On peut vérifier qu'on obtient ainsi une précision relative d'au moins 1/1000, ce qui est même surabondant.

3. Calcul de $\partial L / \partial n$ en un point P d'une orthogonale

Sur la perpendiculaire à l'orthogonale en P, (autrement dit sur la ligne de crête passant par P), on prend de part et d'autre de P, les points Q₁ et Q₂ distants de P d'une longueur Δ égale à la demi-longueur d'onde (voir figure 5).

On calcule en ces points les profondeurs d'eau, puis les longueurs d'ondes L₁ et L₂ associées aux points Q₁ et Q₂ et on calcule :

$$\frac{\partial L}{\partial n} = \frac{L_1 - L_2}{2 \cdot \Delta}$$

Puis ayant calculé la longueur d'onde au point P, on en déduit le rayon de courbure ρ donné par la formule (6.a).

4. Calcul courant d'une orthogonale

On prendra un pas de calcul égal à la longueur d'onde (qui est variable) et on pourra ainsi obtenir immédiatement les lignes de crête en joignant les points correspondants définissant les orthogonales.

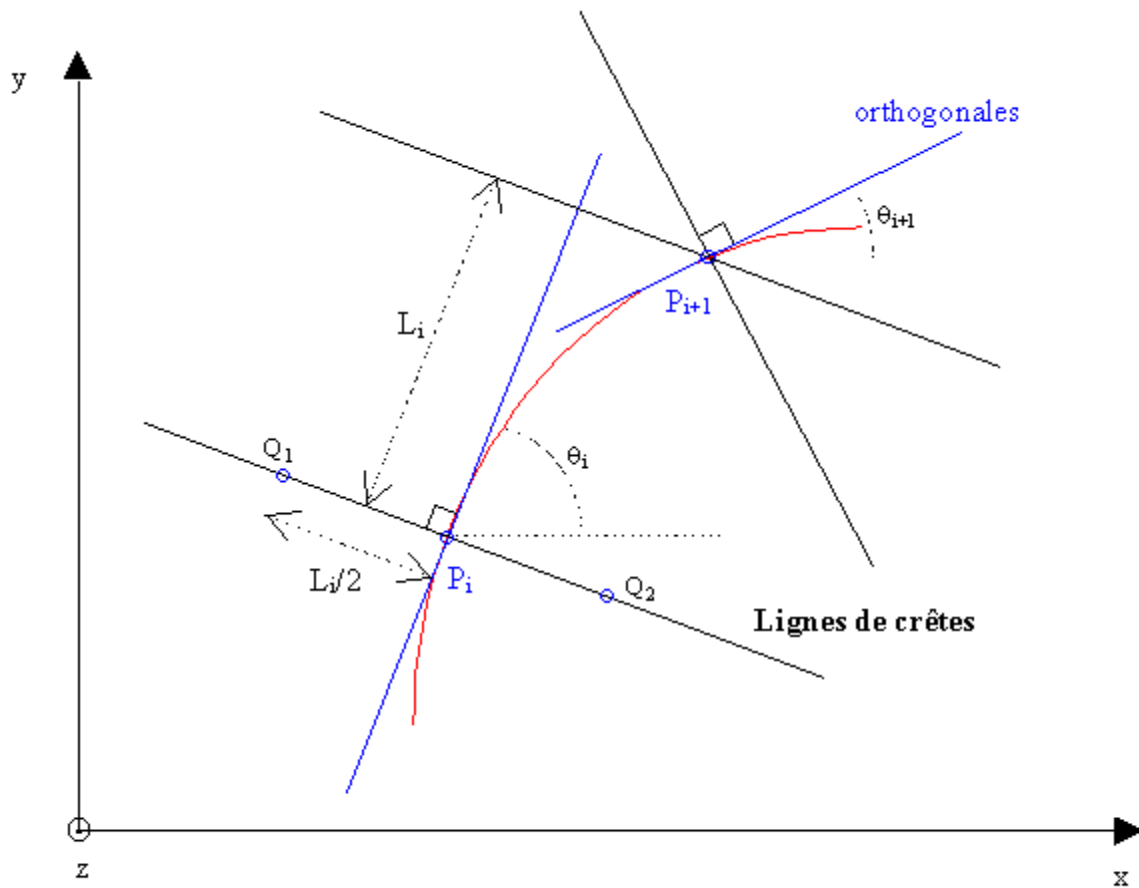


Figure 5, Calcul des coordonnées de P_{i+1} en fonction de celles de P_i

- Au point P_i , on calcule :

$$d_i, L_i, \frac{\partial L}{\partial n} \text{ et la courbure } \rho_i = \frac{\partial \theta}{\partial s} = - \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial n}$$

- On calcule les coordonnées du point suivant P_{i+1}

$$x_{i+1} = x_i + L_i \cdot \cos \alpha_i - \frac{A_i}{2} L_i^2 \cdot \sin \alpha_i$$

$$y_{i+1} = y_i + L_i \cdot \sin \alpha_i + \frac{A_i}{2} L_i^2 \cdot \cos \alpha_i$$

- Au point P_{i+1} , on calcule $d_{i+1}, L_{i+1}, \frac{\partial L}{\partial n}$ et ρ_{i+1}

- Puis on recalcule x_{i+1} et y_{i+1} en prenant au lieu de L_i et ρ_i les moyennes :

$$\frac{L_i + L_{i+1}}{2} \text{ et } \frac{A_i + A_{i+1}}{2}$$

On obtient ainsi un point P'_{i+1} , qui est très voisin de P_{i+1}

- On calcule enfin :

$$\alpha'_{i+1} = \alpha_i + \frac{(\alpha_i + \alpha_{i+1})}{2} \cdot \frac{(L_i + L_{i+1})}{2}$$

- Puis on recommence en partant de P'_{i+1}

Dans le programme, pour ne pas doubler la durée du calcul, on prend bien les nouvelles

coordonnées de P'_{i+1} , mais on garde en ce point les valeurs de d , L , $\frac{\partial L}{\partial n}$ calculées en P_{i+1} , car la distance entre ces deux points est pratiquement toujours très faible, de l'ordre du mètre. Or les positions des cotes du fond sont souvent données avec une précision inférieure.

- Le calcul d'une orthogonale est terminé, soit lorsqu'elle arrive très près du rivage (lorsque la profondeur d'eau est inférieure à 2 m par exemple), soit lorsqu'elle traverse un segment d'arrêt, que l'on situe à l'emplacement de l'ouvrage où l'on veut obtenir la hauteur de la houle