



GROUPE D'HYDRAULIQUE NUMÉRIQUE

SERVICE TECHNIQUE CENTRAL  
DES PORTS MARITIMES ET  
DES VOIES NAVIGABLES  
2, Boulevard Gambetta  
60321 COMPIEGNE CEDEX

# REFLUX V 4.0

## MODULE HYDRODYNAMIQUE

### MANUEL THÉORIQUE

$$[K_{N,x}] = \frac{\text{DetJ}}{6} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Juin 1997

GRADIENT - UNIVERSITE DE TECHNOLOGIE DE COMPIEGNE

Centre de Recherche de Royallieu - 60206 COMPIEGNE - ☎ 03 44 23 44 23 - Télécopie 03 44 23 46 89

# REFLUX V 4.0

---

## MODULE HYDRODYNAMIQUE

### MANUEL THÉORIQUE

---

Les divers participants à cette étude font partie du Groupe d'Hydraulique Numérique.

- **GRADIENT**

Sofiane HADJI                      Ingénieur de recherche

Bertrand MARCHAND            Technicien supérieur

- **Rédaction**

Sofiane HADJI

- **Relecture**

Bertrand MARCHAND

Cette étude a été réalisée pour le compte du STCPMVN

**Le chargé d'étude**

**Sofiane HADJI**

Compiègne, le 23 juin 1997

# REFLUX V 4.0

## MODULE HYDRODYNAMIQUE : MANUEL THÉORIQUE

### SOMMAIRE

<b>1. MODÈLE MATHÉMATIQUE .....</b>	<b>4</b>
<b>2. MODÈLE NUMÉRIQUE .....</b>	<b>8</b>
2.1 FORME INTÉGRALE .....	8
2.2 APPROXIMATION SUR LE DOMAINE D'ÉTUDE .....	11
2.3 APPROXIMATION SUR LA FRONTIÈRE .....	13
<b>3. MODÈLE BANCS COUVRANTS - DÉCOUVRANTS .....</b>	<b>15</b>
3.1 MODÈLE MATHÉMATIQUE .....	15
<i>Détermination de la position du front.....</i>	<i>15</i>
<i>Domaine de calcul.....</i>	<i>15</i>
<i>Equations de Saint-Venant pour la zone mouillée.....</i>	<i>16</i>
<i>Equations de Saint-Venant modifiées dans la zone partiellement mouillée .....</i>	<i>17</i>
3.2 FORME INTÉGRALE .....	17
<b>4. MODÈLE DE TURBULENCE DE TYPE LONGUEUR DE MÉLANGE. ....</b>	<b>18</b>
4.1 MODÈLE MATHÉMATIQUE .....	18
4.2 EXPRESSION DE LA VISCOSITÉ TURBULENTE .....	19
<b>5. MISE EN OEUVRE INFORMATIQUE .....</b>	<b>20</b>
5.1 TYPES D'ÉLÉMENTS.....	20
5.2 FORMULATIONS MATRICIELLES.....	22
<i>Élément 01 .....</i>	<i>22</i>
<i>Élément 02 .....</i>	<i>27</i>
<i>Élément 03 .....</i>	<i>27</i>
<b>6. LISTES DES PROPRIÉTÉS NODALES ET ÉLÉMENTAIRES ET DIFFÉRENTES CONTRIBUTIONS DE CHAQUE ÉLÉMENT .....</b>	<b>28</b>
6.1 PROPRIÉTÉS NODALES .....	28
6.2 PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES .....	28
<i>Éléments 01, 05, 09 et 11 .....</i>	<i>28</i>
<i>Éléments 02, 06, 10 et 12 .....</i>	<i>28</i>
<i>Éléments 03 et 07 .....</i>	<i>28</i>
6.3 CONTRIBUTION DE CHAQUE ÉLÉMENT.....	29
<b>ANNEXE : MODULES DE LA BIBLIOTHÈQUE DES ÉLÉMENTS.....</b>	<b>30</b>

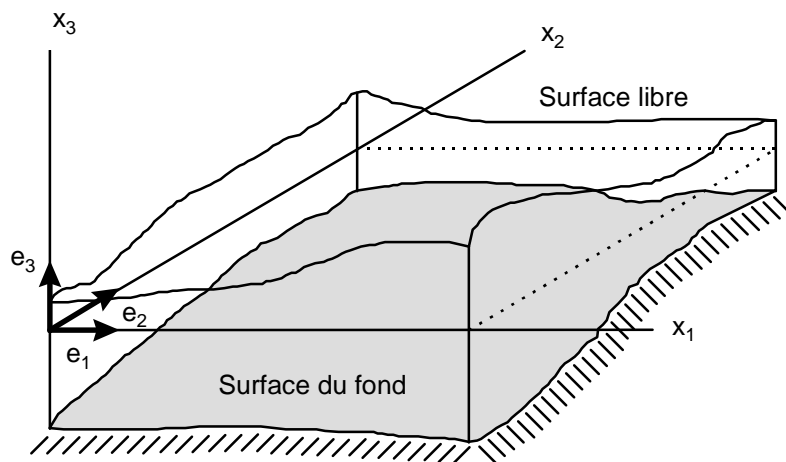
# REFLUX V 4.0

## MODULE HYDRODYNAMIQUE

### MANUEL THÉORIQUE

#### 1. MODÈLE MATHÉMATIQUE

Dans un problème d'écoulement à surface libre, le fluide s'écoule entre la surface du fond et la surface libre :



En notant  $h$  la coordonnée verticale d'un point  $M$  appartenant à la surface libre, celle-ci est définie, à l'instant  $t$ , par les points  $M$  de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  vérifiant l'équation :

$$x_3 - h(x_1, x_2, t) = 0 \quad (1.1)$$

De même, en notant  $z$ , la coordonnée verticale d'un point  $M$  appartenant à la surface du fond, celle-ci est définie, à tout instant (la surface du fond étant supposée indépendante du temps), par :

$$x_3 - z(x_1, x_2) = 0 \quad (1.2)$$

L'écoulement de fluide incompressible entre ces deux surfaces doit vérifier les équations de Navier-Stokes et de continuité, qui s'écrivent en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} - f_i = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

où  $u_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  composante de la vitesse,  $\rho$  la densité du fluide,  $P$  la pression,  $f_i$  la  $i^{\text{ème}}$  composante des forces de volume et  $\tau_{ij}$  les tensions visqueuses, données pour un fluide Newtonien par :

$$\tau_{ij} = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.4)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide.

Le modèle bidimensionnel à surface libre est construit sous les hypothèses de longues ondes et de faible profondeur d'eau (devant les autres dimensions du domaines d'étude).

Les effets dus à la composante verticale de l'accélération sont alors négligeables devant ceux occasionnés par la gravité, et l'équation du mouvement suivant la verticale se réduit à :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_3} + g = 0 \quad (1.5)$$

d'où l'on déduit que la pression est purement hydrostatique :

$$P = \rho g (h(x_1, x_2, t) - x_3) + P_a \quad (1.6)$$

où  $P_a$  désigne la pression atmosphérique qui règne à la surface libre, et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

Le modèle bidimensionnel est obtenu en introduisant les vitesses moyennes sur la hauteur :

$$U = \overline{u_1} \quad \text{et} \quad V = \overline{u_2} \quad (1.7)$$

où la barre désigne l'opérateur de moyenne sur la hauteur, défini pour une fonction  $f$  par :

$$\bar{f}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{H} \int_z^h f(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \quad (1.8)$$

$H$  désignant la hauteur d'eau :

$$H(x_1, x_2, t) = h(x_1, x_2, t) - z(x_1, x_2) \quad (1.9)$$

Les équations sur les vitesses moyennes sont construites en prenant la moyenne des équations de Navier-Stokes et de continuité, en multipliant par  $H$ , et en exploitant les règles moyennes suivantes, vérifiées par l'opérateur de moyenne :

- $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$
- $\overline{\overline{f \cdot g}} = \overline{f \cdot g}$  (1.10)

- $\overline{\overline{f + g}} = \overline{f + g}$

- $H \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial(H\overline{f})}{\partial t} - f(x_1, x_2, h, t) \frac{\partial h}{\partial t}$

- $H \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial(H\overline{f})}{\partial t} + f(x_1, x_2, z, t) \frac{\partial z}{\partial x_i} - f(x_1, x_2, h, t) \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad i = 1, 2$  (1.11)

- $H \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_3} = f(x_1, x_2, z, t) - f(x_1, x_2, h, t)$

Sous les hypothèses déclarées, on aboutit aux équations de Saint-Venant, qui s'écrivent en coordonnées cartésiennes (en posant  $x = x_1$  et  $y = x_2$ ) :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} - v\Delta U - F_x = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} - v\Delta V - F_y = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

où  $F_x, F_y$  intègre aussi bien les forces de volume (Coriolis), que les actions exercées sur le fond (frottement) ou sur la surface libre (vent), ou encore des forces telles que les contraintes de radiations.

les expressions de ces différentes forces sont :

- Forces de Coriolis dues à la rotation de la terre, définie (En identifiant le nord avec la direction x et l'est avec la direction y) par :

$$\begin{cases} F_x = 2V\omega \sin \varphi \\ F_y = 2U\omega \sin \varphi \end{cases} \quad (1.13)$$

où  $\omega$  désigne la vitesse de rotation de la terre en rd/sec,  $\varphi$  la latitude en degrés

- Forces de frottement sur le fond :

$$\begin{cases} F_x = -\beta U \\ F_y = -\beta V \end{cases} \quad (1.14)$$

où le coefficient de frottement  $\beta$  est déterminé par la donnée d'un paramètre positif  $C$  traduisant l'état de surface du fond.

- Si  $C > 1$ , on parle alors de coefficient de Chezy, et  $\beta$  est donné par :

$$\beta = \frac{g}{c^2} \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{H} \quad (1.15)$$

- Si  $C < 1$ , on parle alors de coefficient de Manning et  $\beta$  est donné par :

$$\beta = gc^2 \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{H^{3/4}} \quad (1.16)$$

- Si  $C$  n'est pas donné, on peut utiliser la valeur fournie par la formule

$$c = \left( 19.8 \operatorname{Ln} \left( \frac{915}{v} \right) \right)^{-1} \quad (1.17)$$

- Forces dues au vent définies par :

$$\begin{cases} F_x = -r \frac{\rho_a}{\rho} \cdot \frac{1}{H} \|\vec{w}\| \cdot w_x \\ F_y = -r \frac{\rho_a}{\rho} \cdot \frac{1}{H} \|\vec{w}\| \cdot w_y \end{cases} \quad (1.18)$$

où  $r$  est un coefficient valant 0.0026,  $w_x$  et  $w_y$  sont les composantes du vent suivant  $x$  et  $y$  ayant pour norme  $\|\vec{w}\|$ .  $\rho_a$  et  $\rho$  sont la masse volumique de l'air et de l'eau respectivement.

- Forces dues aux contraintes de radiations :

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{H} \left( \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right) \\ F_y &= \frac{1}{H} \left( \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Les contraintes de radiations  $S_{xx}$ ,  $S_{xy}$ ,  $S_{yy}$  sont calculées au préalable par un modèle de Houle.

En tenant compte de ces forces, les équations régissant les vitesses moyennes U et V dans le plan horizontal, ainsi que la hauteur d'eau H (donc h puisque z est supposé connu), s'expriment finalement en coordonnées cartésiennes (direction x pour le nord et direction y pour l'est) par :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - v \Delta U + \beta U - 2V\omega \sin \varphi - r \frac{\rho_a}{\rho} \cdot \frac{1}{H} \|\vec{w}\| \cdot w_x + \frac{1}{H} \left( \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1.20a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial y} - v \Delta V + \beta V - 2U\omega \sin \varphi - r \frac{\rho_a}{\rho} \cdot \frac{1}{H} \|\vec{w}\| \cdot w_y + \frac{1}{H} \left( \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1.20b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1.20c)$$

## 2. MODÈLE NUMÉRIQUE

Le modèle numérique est construit en introduisant une approximation par éléments finis dans la forme intégrale obtenue par la méthode des résidus pondérés appliquée au système (1.20a - 1.20c), les fonctions-test  $\delta u$ ,  $\delta v$  et  $\delta h$  étant choisies dans les mêmes espaces fonctionnels que les inconnues U, V et h :

$$I = \int_{\Omega} (\delta U(1.20a) + \delta V(1.20b) + \delta h(1.20c)) \cdot d\Omega \quad (2.1)$$

où  $\Omega$  désigne le domaine d'étude.

### 2.1 Forme intégrale

Après application du théorème de Green aux termes en dérivées secondes (termes de diffusion), ainsi qu'aux termes en dérivées spatiales de l'équation de continuité moyenne, et après regroupement des termes de même nature, la forme intégrale s'écrit :

$$I = I_t + I_u + I_v + I_h + I_g + I_\beta + I_\omega + I_{vent} + I_R + I_{u_n} + I_{u_t} + I_Q \quad (2.2)$$

avec :

$$I_t = \int_{\Omega} \left( \delta U \frac{\partial U}{\partial t} + \delta V \frac{\partial V}{\partial t} + \delta h \frac{\partial h}{\partial t} \right) d\Omega \quad (2.3a)$$

$$I_u = \int_{\Omega} \left( U \delta U \frac{\partial U}{\partial x} + V \delta U \frac{\partial U}{\partial y} + U \delta V \frac{\partial V}{\partial x} + V \delta V \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\Omega \quad (2.3b)$$

$$I_v = \int_{\Omega} v \left( \frac{\partial \delta U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \delta U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \delta V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \delta V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\Omega \quad (2.3c)$$

$$I_h = - \int_{\Omega} H \left( U \frac{\partial \delta h}{\partial x} + V \frac{\partial \delta h}{\partial y} \right) d\Omega \quad (2.3d)$$

$$I_g = \int_{\Omega} g \left( \delta U \frac{\partial h}{\partial x} + \delta V \frac{\partial h}{\partial y} \right) d\Omega \quad (2.3e)$$

$$I_{\beta} = \int_{\Omega} \beta (U \delta U + V \delta V) d\Omega \quad (2.3f)$$

$$I_{\omega} = \int_{\Omega} 2\omega \sin \varphi (-V \delta U + U \delta V) d\Omega \quad (2.3g)$$

$$I_{\text{vent}} = \int_{\Omega} \delta U \frac{\alpha}{H} \|\vec{w}\| \cdot w_x d\Omega + \int_{\Omega} \delta V \frac{\alpha}{H} \|\vec{w}\| \cdot w_y d\Omega \quad \text{avec} \quad \alpha = -r \frac{\rho_a}{\rho} \quad (2.3h)$$

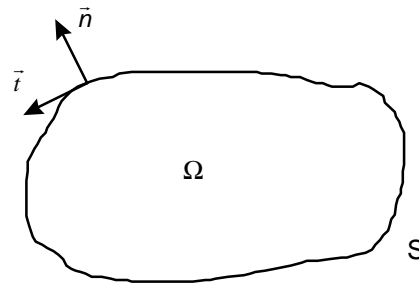
$$I_R = \int_{\Omega} \left( \delta U \cdot \frac{1}{H} \left( \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right) + \delta V \cdot \frac{1}{H} \left( \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \right) \right) d\Omega \quad (2.3i)$$

$$I_Q = \int_{\partial\Omega} (H U_n \delta h) dS \quad (2.3j)$$

$$I_{U_n} = - \int_{\partial\Omega} \left( v \delta U_n \frac{\partial U_n}{\partial n} \right) dS \quad (2.3k)$$

$$I_{U_t} = - \int_{\partial\Omega} \left( v \delta U_t \frac{\partial U_t}{\partial n} \right) dS \quad (2.3l)$$

où S désigne la frontière du domaine  $\Omega$ , t son vecteur tangent, n sa normale extérieure,  $u_t$  la composante tangentielle de la vitesse moyenne,  $u_n$  la composante normale et  $\frac{\partial}{\partial n}$  la dérivée dans la direction de la normale.



La décomposition (2.2) nous conduit à distinguer, en plus des termes de variation en temps, les huit contributions suivantes :

- Termes de convection :  $I_u$
- Termes de diffusion :  $I_v + I_{un} + I_{ut}$
- Termes de continuité :  $I_h + I_Q$
- Termes de gravitation :  $I_g$
- Termes de frottement du fond :  $I_\beta$
- Termes de Coriolis :  $I_\omega$
- Termes du vent :  $I_{vent}$
- Termes des contraintes de radiations :  $I_R$

auxquelles sont affectés les huit coefficients de contribution spécifiés au niveau du bloc FLUT.

### Remarque

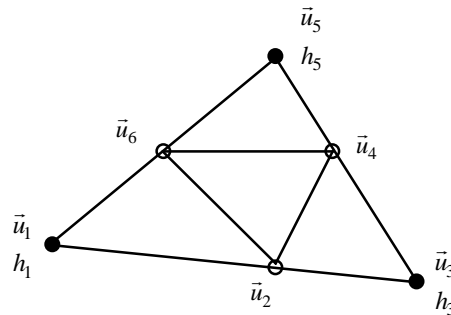
Deux coefficients de contribution sont utilisés pour les termes de continuité afin d'autoriser leur linéarisation, suivant la décomposition suivante de  $I_h$  et  $I_Q$  :

$$I_h = - \underbrace{\int_{\Omega} h \left( U \frac{\partial \delta h}{\partial x} + V \frac{\partial \delta h}{\partial y} \right) d\Omega}_{\text{Non linéaire}} + \underbrace{\int_{\Omega} z \left( U \frac{\partial \delta h}{\partial x} + V \frac{\partial \delta h}{\partial y} \right) d\Omega}_{\text{linéaire}} \quad (2.4)$$

$$I_Q = \underbrace{\int_S h U_n \delta h dS}_{\text{Non linéaire}} - \underbrace{\int_S z U_n \delta h dS}_{\text{linéaire}} \quad (2.5)$$

## 2.2 Approximation sur le domaine d'étude

L'application sur le domaine  $\Omega$  des fonctions inconnues (U, V et h) et donc également des fonctions-test ( $\delta U$ ,  $\delta V$  et  $\delta h$ ), est définie par un découpage de  $\Omega$  en éléments triangulaires à six noeuds P2-P1 et quinze degrés de liberté :



Elément P2 - P1

Sur cet élément l'approximation de U et V est linéaire par morceau, c'est-à-dire qu'elle est linéaire sur chacun des quatre éléments triangulaires à trois noeuds T3 constituant l'élément P2-P1. Par contre, l'approximation de h est simplement linéaire sur l'élément P2-P1.

L'algorithme pour la construction de l'élément P2-P1 est le suivant :

Boucle sur les éléments

Etendre les 15 DDL par élément à 18 en ajoutant 3 DDL aux noeuds milieux :

$$h_2 = \frac{h_3 + h_1}{2}, \quad h_4 = \frac{h_3 + h_5}{2}, \quad h_6 = \frac{h_5 + h_1}{2}$$

Diviser le triangle en 4 sous-triangles et calculer les matrices et les vecteurs pour chaque sous-triangle en le traitant comme un élément triangulaire T3

Boucle sur les 4 sous-triangles

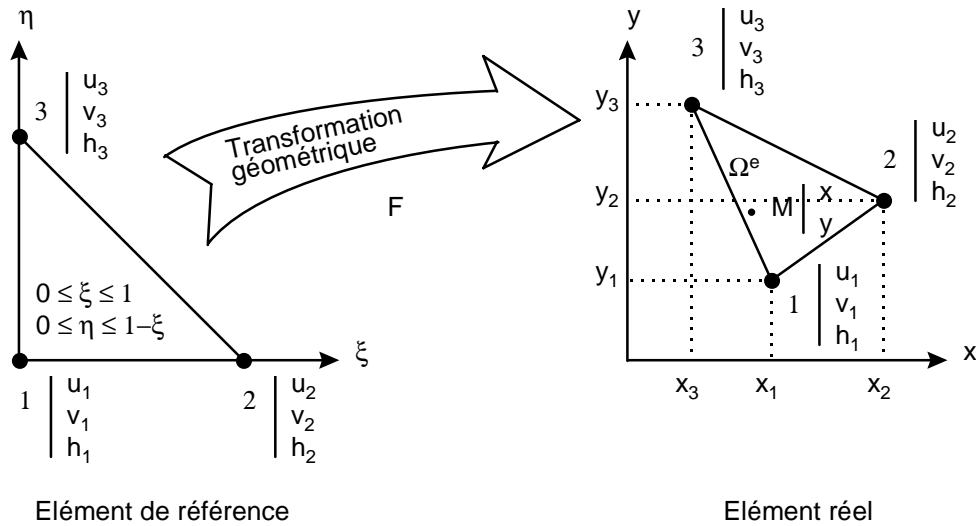
Assembler les matrices et les vecteurs des 4 sous-triangles

Fin de la boucle

Compacter les matrices et les vecteurs de dimension (18X18) et (18) en (15X5) et (15) respectivement en distribuant les niveaux d'eaux  $h_2$ ,  $h_4$  et  $h_6$

Fin de boucle sur les éléments

Pratiquement, pour construire les formes matricielles sur les éléments T3, on se ramène à un élément de référence, défini dans un système de coordonnées  $(\xi, \eta)$  par :



avec les approximations suivantes sur l'élément de référence :

$$x(\xi, \eta) = \langle N_{T_3} \rangle \{x_{T_3}\} \quad \text{avec} \quad \langle x_{T_3} \rangle = \langle x_1 \ x_2 \ x_3 \rangle \quad (2.6a)$$

$$y(\xi, \eta) = \langle N_{T_3} \rangle \{y_{T_3}\} \quad \text{avec} \quad \langle y_{T_3} \rangle = \langle y_1 \ y_2 \ y_3 \rangle \quad (2.6b)$$

$$U(\xi, \eta) = \langle N_{T_3} \rangle \{U_{T_3}\} \quad \text{avec} \quad \langle U_{T_3} \rangle = \langle U_1 \ U_2 \ U_3 \rangle \quad (2.6c)$$

$$V(\xi, \eta) = \langle N_{T_3} \rangle \{V_{T_3}\} \quad \text{avec} \quad \langle V_{T_3} \rangle = \langle V_1 \ V_2 \ V_3 \rangle \quad (2.6d)$$

$$h(\xi, \eta) = \langle N_{T_3} \rangle \{h_{T_3}\} \quad \text{avec} \quad \langle h_{T_3} \rangle = \langle h_1 \ h_2 \ h_3 \rangle \quad (2.6e)$$

où la notation  $\langle a \rangle$  désigne la transposée de la table  $\{a\}$ , et où  $\langle N_{T_3} \rangle$  est la table regroupant les trois fonctions d'interpolation de l'approximation linéaire sur l'élément  $T_3$  :

$$\langle N_{T_3} \rangle = \langle N_1(\xi, \eta) \ N_2(\xi, \eta) \ N_3(\xi, \eta) \rangle \quad (2.6f)$$

Les caractéristiques de ces trois fonctions d'interpolation sont données dans le tableau suivant :

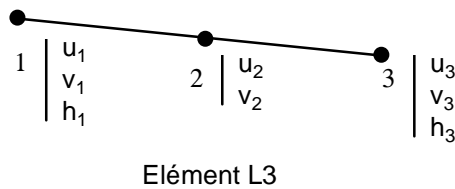
i	$N_i$	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$	$\frac{\partial N_i}{\partial x}$	$\frac{\partial N_i}{\partial y}$	$\int_{\Omega^e} N_i d\Omega$	$\int_{\Omega^e} N_i N_i d\Omega$	$\int_{\Omega^e} N_2 N_i d\Omega$	$\int_{\Omega^e} N_3 N_i d\Omega$
1	$1-\xi-\eta$	-1	-1	$\frac{y_2 - y_3}{\text{DetJ}}$	$\frac{x_2 - x_3}{\text{DetJ}}$	$\frac{\text{DetJ}}{6}$	$\frac{\text{DetJ}}{12}$	$\frac{\text{DetJ}}{24}$	$\frac{\text{DetJ}}{24}$
2	$\xi$	1	0	$\frac{y_3 - y_1}{\text{DetJ}}$	$\frac{x_1 - x_3}{\text{DetJ}}$	$\frac{\text{DetJ}}{6}$	$\frac{\text{DetJ}}{24}$	$\frac{\text{DetJ}}{12}$	$\frac{\text{DetJ}}{24}$
3	$\eta$	0	1	$\frac{y_1 - y_2}{\text{DetJ}}$	$\frac{x_2 - x_1}{\text{DetJ}}$	$\frac{\text{DetJ}}{6}$	$\frac{\text{DetJ}}{24}$	$\frac{\text{DetJ}}{24}$	$\frac{\text{DetJ}}{12}$

où DetJ désigne le déterminant du Jacobien de la transformation géométrique F :

$$\text{DetJ} = (x_2 - x_3)(y_3 - y_1) + (x_1 - x_3)(y_2 - y_1) = 2 \quad (\text{Aire de l'élément réel})$$

### 2.3 Approximation sur la frontière

L'approximation sur la frontière S des fonctions inconnues (U, V et h), et donc également des fonctions-test ( $\delta U$ ,  $\delta V$  et  $\delta h$ ), est définie par un découpage de S en éléments linéaires à trois noeuds L3 et huit degrés de liberté :



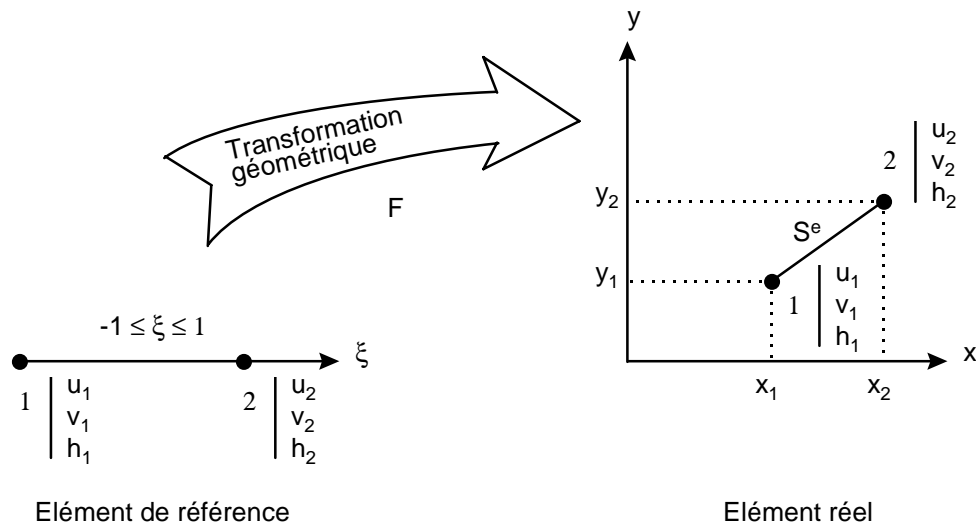
sur cet élément l'approximation de U et V est linéaire par morceau, c'est-à-dire qu'elle est linéaire sur chacun des deux éléments linéaires à deux noeuds L2 constituant l'élément L3.

Ici encore, les formes matricielles sont construites par assemblage des formes matricielles obtenues sur les deux sous-éléments L2, après avoir introduit un degré de liberté supplémentaire en h au noeud milieu tel que :

$$h_2 = \frac{h_3 + h_1}{2} \quad (2.7)$$

Bien entendu, ce degré de liberté supplémentaire est à nouveau éliminé après l'opération d'assemblage.

Pour la construction des formes matricielles sur les éléments L2, on se ramène à un élément L2 de référence, défini par :



avec les approximations suivantes sur l'élément de référence :

$$x(\xi) = \langle N_{L2} \rangle \{x_{L2}\} \quad \text{avec} \quad \langle x_{L2} \rangle = \langle x_1 \ x_2 \rangle \quad (2.8a)$$

$$y(\xi) = \langle N_{L2} \rangle \{y_{L2}\} \quad \text{avec} \quad \langle y_{L2} \rangle = \langle y_1 \ y_2 \rangle \quad (2.8b)$$

$$U_t(\xi) = \langle N_{L2} \rangle \{u_{tL2}\} \quad \text{avec} \quad \langle u_{tL2} \rangle = \langle u_{t1} \ u_{t2} \rangle \quad (2.8c)$$

$$U_n(\xi) = \langle N_{L2} \rangle \{u_{nL2}\} \quad \text{avec} \quad \langle u_{nL2} \rangle = \langle u_{n1} \ u_{n2} \rangle \quad (2.8d)$$

$$h(\xi) = \langle N_{L2} \rangle \{h_{L2}\} \quad \text{avec} \quad \langle u_{nL2} \rangle = \langle h_1 \ h_2 \rangle \quad (2.8e)$$

où  $\langle N \rangle$  est le vecteur regroupant les trois fonctions d'interpolation de l'approximation linéaire sur l'élément  $L_2$  :

$$\langle N_{L2} \rangle = \langle N_1(\xi) \ N_2(\xi) \rangle \quad (2.8f)$$

Les caractéristiques de ces deux fonctions d'interpolation sont données dans le tableau suivant:

i	$N_i$	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\int_{S^e} N_i dS$	$\int_{S^e} N_1 N_i dS$	$\int_{S^e} N_2 N_i dS$
1	$\frac{1-\xi}{2}$	$-\frac{1}{2}$	DetJ	$\frac{2}{3}$ DetJ	$\frac{1}{3}$ DetJ
2	$\frac{1+\xi}{2}$	$\frac{1}{2}$	DetJ	$\frac{1}{3}$ DetJ	$\frac{2}{3}$ DetJ

où DetJ désigne le déterminant du Jacobien de la transformation géométrique F :

$$\text{DetJ} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{Longueur de l'élément réel}) \quad (2.9)$$

### 3. MODÈLE BANCS COUVRANTS - DÉCOUVRANTS

Dans les chapitres précédents, il s'agissait d'étudier des écoulements dans un domaine limité par des frontières fixes. Ceci revient à supposer les frontières solides comme des parois verticales avec réflexion parfaite du flux de la quantité de mouvement. En nature, les limites du domaine d'écoulement ne sont pas toujours fixes, elles peuvent varier fortement sur les berges, faire apparaître ou disparaître des îles.

Ce type d'écoulements comporte des caractéristiques communes :

- En direction verticale, une surface libre.
- En direction horizontale, des frontières mobiles.

Nous appelons la simulation de ce type d'écoulements un modèle de bancs couvrants-découvrants.

#### 3.1 *Modèle mathématique*

L'aspect physique des bancs couvrants-découvrants mène à un modèle mathématique décrit comme suit :

##### Détermination de la position du front

La capture de la position du front est définie par le critère suivant :

$$H = h - z_f = \varepsilon_{ad}$$

où  $\varepsilon_{ad}$  est une valeur admissible et assez petite.

##### Domaine de calcul

Pour capturer la frontière mobile, il est nécessaire de bien définir le domaine de calcul. La définition est basée sur les classifications des noeuds des éléments et des zones suivants :

- Un noeud est localement mouillé, lorsque la profondeur d'eau H :

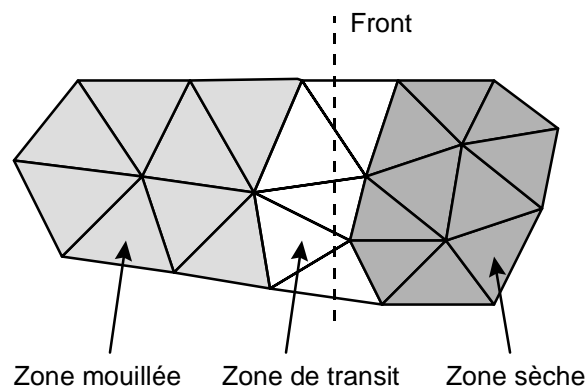
$$H = h - z_f > \epsilon_{ad}$$

- Un noeud est localement sec lorsque :

$$H = h - z_f < \epsilon_{ad}$$

Par conséquent, nous définissons l'état des éléments comme suit :

- Un élément est mouillé, lorsque ses trois noeuds sommets sont mouillés
- Un élément est sec lorsque ses trois noeuds sommets sont secs
- Un élément est partiellement mouillé ou de transit lorsqu'il a 1 ou 2 sommets mouillés



### Equations de Saint-Venant pour la zone mouillée

Pour la zone mouillée qui est constituée par des éléments mouillés, on résout les équations complètes (Equations 1.20a-1.20b-1.20c) en supposant  $v$  constante.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} - v \Delta U + \beta U + F_x = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} - v \Delta V + \beta V + F_y = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

### Equations de Saint-Venant modifiées dans la zone partiellement mouillée

Pour la zone partiellement mouillée qui est constituée par les éléments partiellement mouillés, on résout :

- L'équation de continuité complète :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0 \quad (3.2)$$

- L'équation de la quantité de mouvement simplifiée :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} - \nu' \Delta U + F_x = 0 \quad (3.3a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} - \nu' \Delta V + F_y = 0 \quad (3.3b)$$

### 3.2 Forme intégrale

Pour le modèle bancs couvrants-découvrants, la forme intégrale faible de type Galerbine est :

$$I = I_h + I_u = 0$$

- Zone mouillée :

$$I_h = - \int_{\Omega} \left( \delta h \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla(\delta h) \cdot H \bar{U} \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta h H_{u_n} dS \quad (3.4)$$

$$I_u = \int_{\Omega} \delta \bar{U} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + (\bar{U} \cdot \nabla) \bar{U} + g \nabla h + \frac{g |\bar{U}|}{C^2 H} + \bar{F} \right) dS + \int_{\partial\Omega} \nabla \delta \bar{U} \cdot \frac{[\tau]}{\rho} dS - \int_{\partial\Omega} \delta \bar{U} \cdot \frac{[\tau]_n}{\rho} dS \quad (3.5)$$

- Zone partiellement mouillée :

$$I_u = \int_{\Omega} \delta \bar{U} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + g \nabla h + \frac{g |\bar{U}|}{C^2 H} + \bar{F} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \delta \bar{U} \cdot \frac{[\tau]}{\rho} d\Omega - \int_{\partial \Omega} \delta \bar{U} \cdot \frac{[\tau]_n}{\rho} dS \quad (3.6)$$

où  $[\tau]$  est le tenseur représentant les contraintes visqueuses :

$$[\tau] = 2\nu \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) & \frac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

et  $[\tau]_n$  représente le frottement du bord.

#### 4. MODÈLE DE TURBULENCE DE TYPE LONGUEUR DE MÉLANGE.

Les modèles de turbulence aux longueurs de mélange ne supposent plus la viscosité constante, mais variable en tout point du domaine. Par conséquent, la seule différence qui existe entre un modèle classique et un modèle turbulent de type longueurs de mélange se situe au niveau du calcul de la viscosité ; Pour le premier modèle celle-ci est constante, pour l'autre, elle doit être calculée tout point du domaine à chaque instant t.

##### 4.1 Modèle mathématique

Le modèle de turbulence aux longueurs de mélange utilisé dans la version 4.0 de REFLUX est de type PRANDLT-SMAGORINSKY La valeur de la viscosité turbulente en tous points du domaine est donnée par la relation suivante :

$$\nu_t = l_m^2 \left( \frac{h \sqrt{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}}{\nu_t} \cdot \frac{U_f^2}{h^2} + \bar{S}_{ij} \cdot \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

où :  $\bar{U}$  et  $\bar{V}$  sont les vitesses moyennes sur l'élément.

$\bar{h}$  est la hauteur moyenne sur l'élément.

$U_f$  est la vitesse de frottement.

$L_m$  est la longueur de mélange.

l'expression  $\bar{S}_{ij} \cdot \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}$  est donnée par :

$$\bar{S}_{ij} \cdot \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = 2 \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 \quad (4.2)$$

La vitesse de frottement est donnée par :

$$U_f^2 = C_f (\bar{U}^2 + \bar{V}^2) \quad (4.3)$$

La longueur de mélange  $l_m$  est supposée proportionnelle à la hauteur moyenne et donc :

$$l_m = \alpha \cdot \bar{h} \quad (4.4)$$

En remplaçant ces expressions dans l'expression de  $v_t$ , on obtient alors :

$$v_t = l_m^2 \left( \frac{\sqrt{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}}{v_t} \cdot C_f \frac{(\bar{U}^2 + \bar{V}^2)}{h} + 2 \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.5)$$

## 4.2 Expression de la viscosité turbulente

En transférant l'équation (37), on obtient une équation du troisième degré en  $v_t$  :

$$v_t^3 - Av_t - B = 0 \quad (4.6)$$

avec :

$$\begin{cases} A = \left( 2 \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right)^2 \right) l_m^4 \\ B = \frac{C_f}{h} (\bar{U}^2 + \bar{V}^2) \sqrt{\bar{U}^2 + \bar{V}^2} \cdot l_m^4 \end{cases} \quad (4.7)$$

Cette équation possède 3 solutions dont 2 complexes et une réelle donnée par :

$$v_t = \frac{2^{\frac{1}{3}} A}{\left( 27B + \sqrt{-108A^3 + 729B^2} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 27B + \sqrt{-108A^3 + 729B^2} \right)^{\frac{1}{3}}}{3 + 2^{\frac{1}{3}}} \quad (4.8)$$

En tenant compte que  $l_m = \alpha \cdot \bar{h}$  et que le terme sous la racine doit être positif, on obtient une condition sur le coefficient  $\alpha$  tel que :

$$\alpha = 1.612 \frac{\sqrt{C_f}}{\bar{h}^{3/2}} \left( \frac{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}{2 \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right)^2} \right)^{\frac{3}{4}} \quad (4.9)$$

## 5. MISE EN OEUVRE INFORMATIQUE

### 5.1 Types d'éléments

Douze types d'éléments existent dans la bibliothèque d'éléments du logiciel REFLUX 4.0

1. L'élément de type 05 (module de tête ELEM05) correspond à l'élément T6 par la prise en compte des intégrales sur le domaine  $\Omega$ . Cet élément fait appel à l'élément T3 de type 01 (module de tête ELEM01) associé.
2. L'élément de type 06 (module de tête ELEM06) correspond à un élément de frontière L3 pour la prise en compte de l'intégrale  $I_Q$ , pour les portions de frontière sur lesquelles ni le débit  $Q$ , ni  $h$  ne sont imposés. Cet élément fait appel à l'élément L2 de type 02 (module de tête ELEM02) associé.
3. L'élément de type 07 (module de tête ELEM07) correspond à un élément de frontière L3 pour la prise en compte de l'intégrale  $I_Q$ , pour les portions de frontière sur lesquelles un débit  $Q$  est imposé. Par convention, les débits rentrant sont considérés positifs, d'où :

$$Q = -Hu_n$$

Cet élément fait appel à l'élément L2 de type 02 (module de tête ELEM02) associé.

4. L'élément de type 08 (module de tête ELEM08) correspond à un élément de frontière de frottement L3. Cet élément fait appel à l'élément L2 de type 04 (module de tête ELEM04) associé.
5. L'élément de type 09 (module de tête ELEM09) correspond à l'élément T6 pour la prise en compte des intégrales sur le domaine  $\Omega$  pour les zones partiellement mouillées dans l'option bancs couvrants-découvrants. Cet élément fait appel à l'élément T3 de type 11 (module de tête ELEM11) associé.
6. L'élément de type 10 (module de tête ELEM10) correspond à l'élément T6 pour la prise en compte des intégrales sur le domaine  $\Omega$  pour les zones sèches dans l'option bancs couvrants-découvrants. Cet élément fait appel à l'élément T3 de type 12 (module de tête ELEM12) associé.

Les différentes combinaisons de conditions aux limites possibles, ainsi que le type d'élément de frontière à utiliser dans chaque cas, sont résumés dans le tableau suivant :

Nature de la frontière	Conditions aux limites	$I_{U_t}$	$I_Q$	Élément
Glissement parfait	$\frac{\partial U_t}{\partial n} = 0, U_n = 0$	0	0	Aucun
Frottement de paroi	$v \frac{\partial U_t}{\partial n} = \tau_p, U_n = 0$	$-\int_S \delta U_t \tau_p dS$	0	08
Profil de $U_t$ imposé	$U_t$ fixé, $U_n \neq 0, h$ fixé	0	0	Aucun
Profil de $U_n$ imposé	$U_t$ fixé, $U_n \neq 0$	0	$\int_S \delta U_n \delta h dS$	06
Symétrie pour $U_t$	$\frac{\partial U_t}{\partial n} = 0, U_n \neq 0, h$ fixé	0	0	Aucun
Profil de $U_n$ imposé	$\frac{\partial U_t}{\partial n} = 0, U_n \neq 0$	0	$\int_S \delta U_n \delta h dS$	06
Profil de $U_t$ imposé	$U_t$ fixé, $\frac{\partial U_n}{\partial n} = 0, h$ fixé	0	0	Aucun
Symétrie pour $U_n$	$U_t$ fixé, $\frac{\partial U_n}{\partial n} = 0, Q \neq 0$ fixé	0	$-\int_S Q \delta h dS$	07
	$U_t$ fixé, $\frac{\partial U_n}{\partial n} = 0$	0	$\int_S \delta U_n \delta h dS$	06
Symétrie pour $U_t$	$\frac{\partial U_t}{\partial n} = 0, \frac{\partial U_n}{\partial n} = 0, h$ fixé	0	0	Aucun
Symétrie pour $U_n$	$\frac{\partial U_t}{\partial n} = 0, \frac{\partial U_n}{\partial n} = 0, Q \neq 0$ fixé	0	$-\int_S Q \delta h dS$	07
	$\frac{\partial U_t}{\partial n} = 0, \frac{\partial U_n}{\partial n} = 0$	0	$\int_S \delta U_n \delta h dS$	06

Chaque élément peut, suivant l'expression de la forme intégrale qu'il prend en compte, intervenir dans l'une quelconque des opérations élémentaires envisagées.

## 5.2 Formulations matricielles

### Elément 01

La forme intégrale contenant les termes de variation en temps, conduit à une forme matricielle définie par une matrice masse. Toutes les autres intégrales sur  $\Omega$  conduisent à des formes matricielles définies par une matrice de rigidité. Si celle-ci est non linéaire, il faut également construire l'expression de la matrice tangente. Toutes les tables élémentaires résultant de l'une quelconque des opérations élémentaires (matrice masse, matrice rigidité/tangente, produit  $[M]\{U\}$ , produit  $[K]\{U\}$ ) sont construites dans le repère global du problème. Avant de les transmettre au module d'assemblage, elles doivent donc subir un changement de repère dès que l'élément touche la frontière du domaine  $\Omega$ .

### Terme temporel

La matrice masse est définie par :

$$[M] = \int_{\Omega^e} \{N_{T3}\} \{N_{T3}\} d\Omega = \frac{\text{DetJ}}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

où  $\text{DetJ} = (x_2 - x_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_1)(y_2 - y_3) = 2 * \text{Aire}$

### Termes de convection

- Matrice de rigidité :

$$[K_u] = [M] \left[ \{U_{T3}\} \left\langle \frac{\partial N_{T3}}{\partial x} \right\rangle + \{V_{T3}\} \left\langle \frac{\partial N_{T3}}{\partial y} \right\rangle \right] \quad (5.2)$$

$$\left\langle \frac{\partial N_{T3}}{\partial x} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial x}(\xi, \eta) \quad \frac{\partial N_2}{\partial x}(\xi, \eta) \quad \frac{\partial N_3}{\partial x}(\xi, \eta) \right\rangle \quad (5.3)$$

$$\left\langle \frac{\partial N_{T3}}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial y}(\xi, \eta) \quad \frac{\partial N_2}{\partial y}(\xi, \eta) \quad \frac{\partial N_3}{\partial y}(\xi, \eta) \right\rangle \quad (5.4)$$

- Matrice tangente :

$$\begin{aligned} \Delta = & \langle \delta U_{T3} \rangle \left[ [K_u] + \frac{\partial U}{\partial x} [M] \right] \{ \Delta U_{T3} \} + \frac{\partial U}{\partial y} \langle \delta U_{T3} \rangle [M] \{ \Delta V_{T3} \} \\ & + \langle \delta V_{T3} \rangle \left[ [K_u] + \frac{\partial V}{\partial y} [M] \right] \{ \Delta V_{T3} \} + \frac{\partial V}{\partial x} \langle \delta V_{T3} \rangle [M] \{ \Delta U_{T3} \} \end{aligned} \quad (5.5)$$

### Termes de diffusion

- Matrice de rigidité :

$$[K_v] = v \frac{\text{DetJ}}{2} \left[ \left\{ \frac{\partial N_{T3}}{\partial x} \right\} \left\langle \frac{\partial N_{T3}}{\partial x} \right\rangle + \left\{ \frac{\partial N_{T3}}{\partial y} \right\} \left\langle \frac{\partial N_{T3}}{\partial y} \right\rangle \right] \quad (5.6)$$

- Matrice tangente :

La viscosité  $v$  est indépendante de  $U$ ,  $V$ ,  $h$ , donc :

$$[K_{Tv}] = [K_v]$$

### Termes de continuité

- Matrice de rigidité :

$$[K_{N,x}] = \frac{\text{DetJ}}{6} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.7a)$$

$$[K_{N,y}] = \frac{\text{DetJ}}{6} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.7b)$$

La hauteur d'eau  $H$  est prise au sens moyen sur l'élément

- Matrice tangente :

$$\Delta = -H \langle \delta h_{T3} \rangle [K_{N,x}] \Delta \{ U_{T3} \} - H \langle \delta h_{T3} \rangle [K_{N,y}] \Delta \{ V_{T3} \} - \langle \delta h_{T3} \rangle [U [K_{N,x}] + U [K_{N,y}]] \Delta \{ h_{T3} \} \quad (5.8)$$

$H$ ,  $U$ ,  $V$ , sont prises au sens moyen sur l'élément.

### Terme de gravitation

- Matrice de rigidité :

$$I = g \langle \delta U_{T3} \rangle [K_{N,x}]^T \{h_{T3}\} + g \langle \delta V_{T3} \rangle [K_{N,y}]^T \{h_{T3}\} \quad (5.9)$$

où  $[K]^T$  désigne la transposée de la matrice  $[K]$

- Matrice tangente :

$g$  étant constante, la matrice tangente est donc identique à la matrice de rigidité.

### **Termes de frottement de fond**

- Matrice de rigidité :

$$I = \beta \langle \delta U_{T3} \rangle [M] \{\Delta U_{T3}\} + \beta \langle \delta V_{T3} \rangle [M] \{\Delta V_{T3}\} \quad (5.10)$$

où  $H, U, V$  intervenant dans l'expression  $\beta$  sont pris au sens moyen de l'élément.

- Matrice tangente :

$$\begin{aligned} \Delta = & \beta \left( 1 + \frac{U^2}{U^2 + V^2} \right) \langle \delta U_{T3} \rangle [M] \{\Delta U_{T3}\} + \beta \left( \frac{UV}{U^2 + V^2} \right) \langle \delta U_{T3} \rangle [M] \{\Delta V_{T3}\} + \\ & \beta \left( \frac{U^2}{U^2 + V^2} \right) \langle \delta V_{T3} \rangle [M] \{\Delta U_{T3}\} + \beta \left( 1 + \frac{UV}{U^2 + V^2} \right) \langle \delta V_{T3} \rangle [M] \{\Delta V_{T3}\} - \\ & \alpha \beta \frac{U}{H} \langle \delta U_{T3} \rangle [M] \{\Delta h_{T3}\} - \alpha \beta \frac{V}{H} \langle \delta V_{T3} \rangle [M] \{\Delta h_{T3}\} \end{aligned} \quad (5.11)$$

où  $H, U, V$  sont pris au sens moyen de l'élément

$\alpha = 1$  si  $\beta$  est défini par Chezy.

$\alpha = 4/3$  si  $\beta$  est défini par Manning.

### **Termes de Coriolis**

- Matrice de rigidité :

$$I = -2\omega \sin \varphi \langle \delta U_{T3} \rangle [M] \{V_{T3}\} + 2\omega \sin \varphi \langle \delta V_{T3} \rangle [M] \{U_{T3}\} \quad (5.12)$$

- Matrice tangente :

La rotation de la terre  $\omega$ , ainsi que la latitude  $\varphi$ , étant indépendantes de  $U, V$  et  $h$ , la matrice tangente est identique à la matrice de rigidité.

### **Termes dus au Vent**

- Vecteur résidu :

$$\{f_u\} = \int_{\Omega} \frac{\alpha}{H} \|\bar{w}\| \cdot \text{Det} J \{N_{T3}\} \cdot (N_i w_{x_i}) d\Omega \quad (5.13a)$$

$$\{f_v\} = \int_{\Omega} \frac{\alpha}{H} \|\bar{w}\| \cdot \text{DetJ}\{N_{T3}\} \cdot (N_i w_{y_i}) d\Omega \quad (5.13b)$$

avec  $\alpha = -r \frac{\rho_a}{\rho}$  et  $\|\bar{w}\|$  la norme du vecteur vent.

En prenant H moyennée sur l'élément ainsi que  $w_x$  et  $w_y$ , nous obtenons alors :

$$\{f_u\} = \frac{\alpha \|\bar{w}\|}{H} \cdot \frac{\text{DetJ}}{6} \bar{w}_x \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.14a)$$

$$\{f_v\} = \frac{\alpha \|\bar{w}\|}{H} \cdot \frac{\text{DetJ}}{6} \bar{w}_y \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.14b)$$

avec  $\bar{w}_x = \frac{w_{x1} + w_{x2} + w_{x3}}{3}$  et  $\bar{w}_y = \frac{w_{y1} + w_{y2} + w_{y3}}{3}$

• Matrice tangente :

$$[K_{TV}] = -\frac{\alpha \|\bar{w}\|}{H^2} (\bar{w}_x + \bar{w}_y) [M] \quad (5.15)$$

où H est la profondeur moyennée sur l'élément

[M] est la matrice masse

$\|\bar{w}\|$  est la norme du vecteur vent

## Termes dus aux contraintes de radiations

- Vecteur résidu :

$$\{f_u\} = \frac{\text{DetJ}}{6H} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (N_{i,x} S_{xx_i} + N_{i,y} S_{xy_i}) \quad (5.16a)$$

$$\{f_v\} = \frac{\text{DetJ}}{6H} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (N_{i,x} S_{xy_i} + N_{i,y} S_{yy_i}) \quad (5.16b)$$

où  $N_{i,x} S_{xx_i} = N_{1,x} S_{xx_1} + N_{2,x} S_{xx_2} + N_{3,x} S_{xx_3}$

$$N_{i,y} S_{xy_i} = N_{1,y} S_{xy_1} + N_{2,y} S_{xy_2} + N_{3,y} S_{xy_3}$$

$$N_{i,x} S_{xy_i} = N_{1,x} S_{xy_1} + N_{2,x} S_{xy_2} + N_{3,x} S_{xy_3}$$

$$N_{i,y} S_{yy_i} = N_{1,y} S_{yy_1} + N_{2,y} S_{yy_2} + N_{3,y} S_{yy_3}$$

- Matrice tangente :

$$\Delta = -\langle \delta U_{T3} \rangle [M] \left( \frac{N_{i,x} S_{xx_i} + N_{i,y} S_{xy_i}}{H^2} \right) \{\delta h_{T3}\} - \langle \delta V_{T3} \rangle [M] \left( \frac{N_{i,x} S_{xy_i} + N_{i,y} S_{yy_i}}{H^2} \right) \{\delta h_{T3}\} \quad (5.17)$$

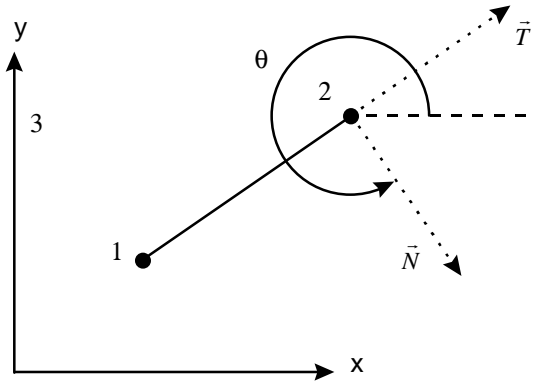
où [M] est la matrice masse

H est la profondeur moyennée sur l'élément

les expressions  $N_{i,x} S_{xx_i} \dots$  sont identiques à celles ci-dessus.

### Elément 02

Pour les parties de la frontière S du domaine  $\Omega$  telles que ni le débit Q, ni H ne sont imposés, la forme intégrale  $I_Q$  définie par (34) conduit à une forme matricielle définie par une matrice de rigidité. Cette forme matricielle est construite directement dans le repère local (N,T). Les degrés de liberté en vitesse U et V doivent donc d'abord être transformés en composantes normale  $U_n$  et tangentielle  $U_t$ . A cette fin, l'orientation du repère local par rapport au repère global est déterminée à partir de l'orientation de l'élément L2 :



Le vecteur tangent étant choisi dans la direction du noeud 1 au noeud 2, on prendra garde d'orienter les éléments de frontière de façon à avoir une normale qui pointe vers l'extérieur du domaine d'étude.

- Matrice de rigidité :

$$I = -z \langle \delta h_{L2} \rangle [M] \{ U_{nL2} \} + U_n \langle \delta h_{L2} \rangle [M] \{ h_{L2} \} \quad (5.18)$$

où la profondeur z et la vitesse normale  $U_n$  sont prises au sens moyen sur l'élément

$$[M] = \frac{\text{DetJ}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

avec  $\text{DetJ} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{2}$

- Matrice tangente :

$$\Delta = H \langle \delta h_{L2} \rangle [M] \{ \Delta U_{nL2} \} + U_n \langle \delta h_{L2} \rangle [M] \{ \Delta h_{L2} \} \quad (5.19)$$

où H et  $U_n$  sont pris au sens moyen sur l'élément.

### Elément 03

Pour les parties de la frontière S du domaine  $\Omega$  sur lesquelles le débit Q est imposé, la forme intégrale  $I_Q$  définie par (34) conduit à la forme matricielle définie par un vecteur résidu.

- Vecteur résidu :

$$\{f_Q\} = \frac{DetJ}{6} \begin{Bmatrix} 2Q_1 + Q_2 \\ Q_1 + 2Q_2 \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

avec  $DetJ = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{2}$

## 6. LISTES DES PROPRIÉTÉS NODALES ET ÉLÉMENTAIRES ET DIFFÉRENTES CONTRIBUTIONS DE CHAQUE ÉLÉMENT

### 6.1 Propriétés nodales

Propriété	Signification
1	Angle $(x, \vec{N})$ définissant le repère local (N, T)
2	Valeur du débit

### 6.2 Propriétés élémentaires

#### Eléments 01, 05, 09 et 11

Propriété	Signification
1	Viscosité cinématique $\nu$
2	Coefficient de Chezy-Manning C
3	$\alpha$ intervenant dans le calcul de la longueur de mélange ( $l_m = \alpha \bar{h}$ )

#### Eléments 02, 06, 10 et 12

Pas de propriétés élémentaires

#### Eléments 03 et 07

Pas de propriétés élémentaires

### 6.3 Contribution de chaque élément

Coefficient de contribution	Affectation	Éléments concernés
1	Termes de convection	01-05
2	Termes de diffusion	01-03-05-08-09-11
3	Termes de continuité linéaire	01-02-05-06-09-11
4	Termes de continuité non linéaire	01-02-05-06
5	Termes de gravitation	01-05-09-11
6	Termes de frottement de fond	01-05
7	Termes de Coriolis	01-05
8	Termes des contraintes de radiations	01-05-09-11
9	Termes des forces du vent	01-05-09-11

## ANNEXE :

### Modules de la bibliothèque des éléments

#### *Elément T3 de type 01*

ELEM01	Module de tête de l'élément 02
EL02KU	Produit $[K]\{U\}$
EL01MU	Produit $[M]\{U\}$
EL01KE	Matrice de rigidité/tangente $[K]$
IL01ME	Matrice masse $[M]$

#### *Elément L2 de type 02*

ELEM02	Module de tête de l'élément 02
EL02KU	Produit $[K]\{U\}$
EL02KE	Matrice de rigidité/tangente $[K]$

#### *Elément L2 de type 03*

ELEM03	Module de tête de l'élément 03
EL03FE	Sollicitations réparties

#### *Elément T6 de type 05*

ELEM05	Module de tête de l'élément 05
EL05KU	Produit $[K]\{U\}$
EL05NU	Produit $[M]\{U\}$
EL05KE	Matrice de rigidité/tangente $[K]$
EL05ME	Matrice masse $[M]$

### ***Elément L3 de type 06***

ELEM06	Module de tête de l'élément 06
EL06KU	Produit $[K]\{U\}$
EL06KE	Matrice de rigidité/tangente $[K]$

### ***Elément L3 de type 07***

ELEM07	Module de tête de l'élément 07
EL07FE	Sollicitations réparties

### ***Elément T6 de type 09***

ELEM09	Module de tête de l'élément 09
EL09KU	Produit $[K]\{U\}$
EL09MU	Produit $[M]\{U\}$
EL09KE	Matrice de rigidité/tangente $[K]$
EL09ME	Matrice masse $[M]$

### ***Elément T6 de type 10***

ELEM10	Module de tête de l'élément 10
EL10MU	Produit $[M]\{U\}$
EL10ME	Matrice masse $[M]$

### ***Elément T3 de type 11***

ELEM11	Module de tête de l'élément 11
EL11KU	Produit $[K]\{U\}$
EL11MU	Produit $[M]\{U\}$
EL11KE	Matrice de rigidité/tangente $[K]$
EL11ME	Matrice masse $[M]$

### ***Elément T3 de type 12***

ELEM12	Module de tête de l'élément 12
EL12MU	Produit $[M]\{U\}$
EL12ME	Matrice masse $[M]$